TD 1 : Etude de suites

Ce premier TD se présente sous la forme d'une succession de petits exercices qui présentent chacun l'étude d'un type de suite particulier avec Maple.
Entre parenthèses, en `Courier`, à la fin des questions, on trouvera des commandes Maple utiles pour répondre à la question.

Ex 1 : Des poissons

(Largement inspiré de 'La recherche' n°296, p132)
On étudie un banc de poissons évoluant dans l'océan Pacifique. Sa population u suit la loi suivante (n est l'année) :

$$u_n = R \cdot u_{n-1}$$

On prend $R = 1{,}5$. Il y a 2 poissons au départ.

1. Définir une fonction $u(n)$ permettant de calculer le n-ième terme de la suite (`->`).
2. Calculer ses premiers termes (`seq`).
3. Tracer les premières valeurs de la suite (`seq`, `plot`).
4. Faire calculer à Maple une expression non récursive du n-ième terme de la suite, quelque soit R (`rsolve`).
5. Calculer la limite de la suite (`limit`).

Ex 2 : Trop de poissons nuit aux poissons

Malheureusement, quand il y a trop de poissons, ceux-ci commencent à avoir du mal à se nourrir. Ainsi, on observe que la population suit la loi :

$$u_n = R \cdot u_{n-1} \cdot \left(1 - \frac{u_{n-1}}{100000}\right)$$

1. Comme précédemment, définir $u(n)$.
2. Calculer les premiers termes et tracer sur un même graphe la courbe représentative de f définie par : $u_n = \mathrm{f}(u_{n-1})$, la courbe représentative de l'application identité, et l'escalier représentant les premiers termes de la suite (`plots[display]`).
   On pourra s'aider de la fonction :
   `marche := i -> ([u(i),u(i)],[u(i),u(i+1)])`
3. Expérimenter diverses valeurs de R (2.6, 3.25, ...). Que remarque-t-on ?
4. Déterminer les points attractifs/répulsifs de f (`solve, D` ou `diff`). Quelle valeur particulière de R apparaît ?
5. Que se passe-t-il pour R>3 ? R>3,5 ? et R>4 ? Peut-on déterminer les valeurs de R pour lesquelles le comportement de la suite change ?

Ex 3 : Des godzillas et des poissons

Les godzillas sont de grands amateurs de poissons et vivent dans le même océan. On remarque que leur population v suit la loi :

$$v_n = \frac{1}{4} \cdot v_{n-1} \cdot \left(1 - \frac{v_{n-1}}{25000} + \min\left(4, \frac{u_{n-1}}{1000}\right)\right)$$

En présence de godzillas, la population des poissons suit la loi :

$u_n = R \cdot u_{n-1} \cdot \left(1 - \frac{u_{n-1}}{100000} - \frac{v_{n-1}}{5000}\right)$, R=1,5.

Il y a au départ 4200 poissons et un godzilla.

1. Définir des fonctions permettant de calculer efficacement les valeurs des suites u et v (`proc`, `option remember`). Prévoir le cas où une des populations s'éteint.
2. Tracer sur un même graphe l'évolution des deux populations. Que remarque-t-on ?
3. Suite à des manipulations génétiques, les poissons se reproduisent plus vite (R=2.5). Que ce passe-t-il ? Le résultat est-il ce que vous attendiez ?

Ex 4 : Suite de fonctions

On étudie la suite de fonctions : $f_n(x) = n \cdot \cos(x)^n \cdot \sin(x)$.

1. Etudier la convergence simple sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (`limit`).
2. Tracer les premiers termes de la suite.
3. Etudier la convergence uniforme sur $\left[a, \frac{\pi}{2}\right]$ où a>0.
4. Il y a-t-il convergence uniforme sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$? (`diff`, `solve`, `limit`)
5. Calculer $\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi/2} f_n(x)dx$ (`int`, `subs`). Remarque ?

Ex 5 : Récurrence à solution polynômiale

(Les 5/2 ont déjà fait cet exercice, et peuvent plutôt s'attaquer au suivant, du même style).

On étudie la suite définie par $u_{n+2} = \frac{5}{n} u_{n+1} + \frac{n+1}{n} u_n$.

Chercher une solution sous forme d'un polynôme en n de degré 3.

Méthode :

1. Commencer par exprimer la définition de la suite sous forme d'une expression devant être nulle pour tout n.
2. Créer un polynôme dont les coefficients sont *a0* .. *a3* (`add`, `.`).
3. Le transformer en une fonction p (`unapply`).
4. Remplacer u par p dans l'équation initiale (`subs`).
5. Exprimer le résultat obtenu sous forme de polynôme en n (`collect`).
6. En extraire les coefficients (`coeffs`).
7. Résoudre (tous les coefficients doivent être nuls) (`solve`).
8. Substituer les solutions dans le polynôme initial.
9. Vérifier que la solution obtenue convient.

Ex 6 : Développements limités

On étudie la suite définie par $u_n = \sqrt[4]{n^4 - 3n^2} - \sqrt[3]{P}$ où P est un polynôme.

Chercher l'ensemble des P tels que la suite converge.